Test Telematico di Matematica (A)

Scienze Agrarie 3/11/2020

1) Calcolare
$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\cos(e^x)-1}{e^{2x}}\,.$$

2) La funzione
$$f(x)=\begin{cases} \frac{\tan(x)}{x} & \text{se} \quad x\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{0\} \\ 2 & \text{se} \quad x=0 \end{cases}$$
risulta continua nel punto $x_0=0$?

3) Determinare l'insieme di definizione della funzione
$$f(x)=\frac{\sqrt{\log(x)}}{x-6}\,.$$

4) Calcolare
$$\int_1^2 \frac{1}{x^2-5x+4}\,dx\,.$$

Soluzione

1) Si pone $t = e^x$ e si ha il limite

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{\cos(e^x) - 1}{e^{2x}} = \lim_{t \to 0} \frac{\cos(t) - 1}{t^2} = -\frac{1}{2}$$

2) Poiché risulta

$$\lim_{x \to 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

la funzione non risulta continua essendo $f(0) \neq 1$.

3) L'insieme di definizione D è dato dai valori reali per i quali risulta $x \geq 1$ e$x \neq 6$. Si ha quindi

$$D = [1, 6) \cup (6, +\infty) \, .$$

4) L'integrale è **improprio**. Cerchiamo la primitiva della funzione integranda.

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2 - 5x + 4} \, dx &= \int \left[\frac{1}{3(x-4)} - \frac{1}{3(x-1)} \right] dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \log|3(x-4)| - \frac{1}{3} \log|3(x-1)| \right] \\ &= \frac{1}{3} \log\left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C \end{aligned}$$

Per esistere l'integrale improprio deve esistere finito il limite

$$\lim_{t \to 1^+} \left[\frac{1}{3} \log\left| \frac{x-4}{x-1} \right| \right]_1^2 = \frac{1}{3} \left(\log(2) - \lim_{t \to 1^+} \log \frac{4-t}{t-1} \right) = -\infty$$

Segue che la funzione non risulta integrabile in senso improprio.